SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

Angelo Favini

UNA CLASSE DI OPERATORI DIFFERENZIALI GENERANTI SEMIGRUPPI ANALITICI

2 aprile 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

Riassunto. Si prova che, sotto opportune ipotesi sui coefficienti α,β, dove $\alpha,\beta \in C[0,1]$, $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$, $\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1)$, alcuni domini naturali per l'operatore degenere $Au := \alpha(x)u''+\beta(x)u'$ nello spazio $C[0,1]$ coincidono e $(A,D(A))$ genera un semigruppo analitico.

Abstract. It is proven that under suitable hypotheses on the continuous real-valued functions α,β on the unit interval $[0,1]$, with $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$, $\alpha(x) > 0$ for every $x \in (0,1)$, some important domains for the degenerate operator $Au := \alpha(x)u''+\beta(x)u'$ in the space $C[0,1]$ coincide and $(A,D(A))$ generates an analytic semigroup.

1. Introduzione

Siano α,β due funzioni continue da $[0,1]$ in R, con $\alpha(x)>0$ per $0<x<1$ e $\alpha(0)=0=\alpha(1)$. Denotiamo con A l'operatore differenziale degenere

$$Au := \alpha(x)u''+\beta(x)u'.$$

Il problema è di definire un dominio D(A) di A tale che (A,D(A)) generi non solo un semigruppo fortemente continuo e contrattivo nello spazio $C[0,1]$ delle funzioni continue su $[0,1]$, munito della norma del massimo $\|\cdot\|_\infty$, ma anche analitico.
È ben noto che la prima questione ha avuto ampia trattazione nella letteratura, date le molteplici applicazioni concrete in teoria della approssimazione, in probabilità, in genetica: si veda, per esempio, Henry [H] e Mandl [M].
Proprio considerazioni probabilistiche dovute fondamentalmente a Feller [F], inducono a pensare che domini "naturali" potrebbero essere

$$D_V := \{u\in C[0,1]\cap C^2(0,1)\ ;\ Au\in C[0,1],\ \lim_{x\to 0,1}(Au)(x) = 0\},$$

cioè u appartiene a D_V se e solo se u soddisfa le condizioni ai limiti di tipo Ventcel' [V], oppure

$$D_T := \{u\in C[0,1]\cap C^2(0,1)\ ;\ Au\in C[0,1]\},$$

cioè, nessuna condizione ai limiti è fissata per u o per Au, oppure

$$D_N := \{u\in C[0,1]\cap C^2(0,1)\ ;\ Au\in C[0,1],\ \lim_{x\to 0,1}\frac{u'(x)}{W(x)} = 0\},$$

dove

$$W(x) := \exp\Big(-\int_{1/2}^{x}\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}dt\Big),$$

cosicchè $Au = \alpha W(W^{-1}u')'$.
Così $u\in D_N$ se e solo se u soddisfa le condizione di Neumann degeneri generalizzate.
Per quanto riguarda D_V, il risultato più importante per la generazione di semigruppo è dovuto a Clément e Timmermans [CT]. Questi autori provarono che (A,D_V) genera un semigruppo C_0 contrattivo in $C[0,1]$ se e solo se

$$W\in L^1(0,1/2)\ \text{ oppure }\ \int_0^{1/2} W(x)\int_0^x \frac{dt}{\alpha(t)W(t)}dx = \infty\ \text{ o entrambe}$$

e

$$W\in L^1(1/2,1)\ \text{ oppure }\ \int_{1/2}^{1} W(x)\int_1^x \frac{dt}{\alpha(t)W(t)}dx = \infty\ \text{ o entrambe.}$$

Posto

$$Q(x) := \frac{1}{\alpha(x)W(x)}\int_{1/2}^{x} W(s)ds,$$

applicando il Teorema di Fubini si vede facilmente che le precedenti condizioni sono equivalenti a

$W \in L^1(0,1/2)$ oppure $Q \notin L^1(0,1/2)$ o entrambe

e

$W \in L^1(1/2,1)$ oppure $Q \notin L^1(1/2,1)$ o entrambe.

Invece, se

$$R(x) := W(x) \int_{1/2}^{x} \frac{ds}{\alpha(s)W(s)},$$

allora (A,D_T) genera un semigruppo fortemente continuo e contrattivo in $C[0,1]$ se e solo se

$$R \notin L^1(0,1/2),\ R \notin L^1(1/2,1),$$

vedi Timmermans [T].

Infine, se $\frac{1}{\alpha W} \in L^1(0,1)$, Feller [F] provò che allora (A,D_N) genera anch'esso un semigruppo di classe C_0 contrattivo in $C[0,1]$.

Può accadere che alcuni degli operatori precedentemente introdotti coincidano. Per esempio, se $\frac{1}{\alpha W} \in L^1(0,1)$ e in più, $W \notin L^1(0,1/2)$, $W \notin L^1(1/2,1)$, allora $D_T = D_N$, vedi Metafune e Pallara [MP]. Infatti, tenendo conto che $Au = \alpha W(W^{-1}u')'$, posto $Au = f$, integrando si ottiene

$$\frac{u'(x)}{W(x)} - u'(1/2) = \int_{1/2}^{x} \frac{f}{\alpha(s)W(s)}\, ds.$$

La sommabilità di $\frac{1}{\alpha W}$ su $(0,1)$ implica l'esistenza di $\lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{W(x)} = \lambda \in C$. Se λ fosse diverso da 0, allora $u'(x)$ si comporterebbe come $\lambda W(x)$ vicino a 0. Ma allora $u(x) - u(\varepsilon) \approx \lambda \int_{\varepsilon}^{x} W(t)dt$. Mandando ε a 0, la condizione $W \notin L^1(0,1/2)$ porterebbe a contraddire $u \in C[0,1]$. Analogo discorso per $x = 1$.

In questo seminario daremo delle condizioni sui coefficienti α e β affinchè $D_T = D_V$ ed anche $D_T = D_V = D_N$. Mostreremo inoltre che i corrispondenti semigruppi sono analitici. I risultati principali sono contenuti nei due lavori di Favini e Romanelli [FR] e Favini, Goldstein, Romanelli [FGR].

2. Teoremi di generazione

Cominciamo con l'osservare che il citato Teorema di Clément e Timmermans [CT] resta valido se si prende $C[a,b]$ al posto di $C[0,1]$, dove $-\infty \le a < b \le \infty$, e

$$C[a,+\infty] := \{f : [a,+\infty[\to C \,;\, f \text{ continua}, \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) \in C \}, \; -\infty < a,$$

$$C[-\infty,b] := \{f :]-\infty,b]\to C \,;\, f \text{ continua}, \exists \lim_{x\to-\infty} f(x) \in C \}, \; b < +\infty,$$

$$C[-\infty,+\infty] := \{f : R \to C \,;\, f \text{ continua}, \exists \lim_{|x|\to+\infty} f(x) \in C \},$$

purchè ad 1/2 si sostituisca un fissato elemento di]a,b[.
Se]a,b[= R, $\alpha \equiv 1$ e $\beta \equiv 0$, allora $W(x) \equiv 1$, $Q(x) = x = R(x)$, cosicchè $Q \notin L^1(-\infty,0)$, $Q \notin L^1(0,+\infty)$. Pertanto, l'operatore $Bu := u''$ con dominio $D\mathcal{V}$ dato da

$$D\mathcal{V} := \{u \in C[-\infty,+\infty] \cap C^2(-\infty,+\infty) \,;\, \lim_{|x|\to+\infty} u''(x) = 0 \}$$

genera un semigruppo C_0 contrattivo in $C[-\infty,+\infty]$.
D'altro canto, poichè $R \notin L^1(-\infty,0)$, $R \notin L^1(0,+\infty)$, per il risultato di Timmermans [T], $Bu = u''$ con dominio

$$D\mathcal{T} := \{u \in C[-\infty,+\infty] \cap C^2(-\infty,+\infty) \,;\, u'' \in C[-\infty,+\infty] \},$$

genera anch'esso un semigruppo contrattivo in $C[-\infty,+\infty]$ e chiaramente $(B,D\mathcal{V}) = (B,D\mathcal{T})$.
È anche ben noto che il gruppo delle traslazioni

$$T(t)u(x) := u(x+t), \; x,t \in R$$

è un gruppo fortemente continuo in $C[-\infty,+\infty]$, il cui generatore K è caratterizzato da

$$Ku := u' = \frac{du}{dx}, \quad D(K) := \{u \in C[-\infty,+\infty] \,;\, \exists\, u' \in C[-\infty,+\infty]\}.$$

È facile vedere che ogni $u \in D(K)$ soddisfa necessariamente $\lim_{|x|\to+\infty} u'(x) = 0$.
Poichè il quadrato K^2 di K genera un semigruppo analitico in $C[-\infty,+\infty]$, vedi Nagel [N,A-II, Theorem 1.15], segue che l'operatore $K^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ con dominio

$$D(K^2) := \{u \in C[-\infty,+\infty] \,;\, \exists\, u',u'' \in C[-\infty,+\infty]\}$$

genera un semigruppo analitico in $C[-\infty,+\infty]$. Inoltre, ogni $u \in D(K^2)$ soddisfa $\lim_{|x|\to+\infty} u'(x) = 0 = \lim_{|x|\to+\infty} u''(x)$.

Segue che $(K^2,D(K^2)) = (B,D\mathcal{V}) = (B,D\mathcal{T})$ genera un semigruppo analitico in $C[-\infty,+\infty]$.
Sia $\eta = \eta(x)$ una funzione appartenente a $C[-\infty,+\infty]$, e quindi uniformemente continua. Denotato con H l'operatore di moltiplicazione per $\eta(x)$ in $C[-\infty,+\infty]$, chiaramente HK è un operatore K^2-limitato con K^2-confine uguale a 0. Vedi McBride [Mc], Theorem 2.25, p.47. Pertanto sappiamo che anche $K^2 + HK$ con $D(K^2 + HK) = D(K^2)$ genera un semigruppo analitico in $C[-\infty,+\infty]$.
Dunque, per ogni $f \in C[-\infty,+\infty]$ e per ogni λ complesso con parte reale sufficientemente grande, esiste $u \in D(K^2) = D\mathcal{T} = D\mathcal{V}$ tale che $(\lambda - K^2 - HK)u = f$ e

$$\|u\|_\infty \le C(1+|\lambda|)^{-1}\|f\|_\infty ,$$

dove C è una costante indipendente da f.
D'altra parte, se denotiamo con UC(R) ($UC^2(R)$, rispettivamente) l'insieme delle funzioni uniformemente continue su R, (insieme con le derivate del primo e del secondo ordine, rispettivamente), allora l'operatore in UC(R) definito da

$$Lu := u''+\eta u', \quad D(L) := UC^2(R),$$

genera un semigruppo analitico in UC(R), a dominio denso, e inoltre
$D(L) = \{u \in UC(R) ; Lu \in UC(R)\}$, vedi Lunardi [L], Corollary 3.1.9, p.81.
Ora, $f \in C[-\infty,+\infty]$ è un elemento di UC(R), cosicchè esiste una unica $v \in D(L)$, tale che $\lambda v - v'' - \eta v' = f$. Per unicità $u = v$ e $\lim_{|x|\to+\infty} v'(x) = 0 = \lim_{|x|\to+\infty} v''(x)$. Segue che

$$\begin{aligned} D(K^2) &= \{u \in C[-\infty,+\infty] \cap C^2(-\infty,+\infty) ; u''+\eta u' \in C[-\infty,+\infty] \} \\ &= \{u \in C[-\infty,+\infty] \cap C^2(-\infty,+\infty) ; u''+\eta u' \in C[-\infty,+\infty], \\ &\qquad \lim_{|x|\to+\infty} u'(x) = 0 = \lim_{|x|\to+\infty} u''(x) \} \\ &\subseteq \{u \in C[-\infty,+\infty] \cap C^2(-\infty,+\infty) ; u''(x)+\eta(x)u'(x) \to 0 \text{ per } |x| \to +\infty\} \\ &\subseteq \{u \in C[-\infty,+\infty] \cap C^2(-\infty,+\infty) ; u''+\eta u' \in C[-\infty,+\infty] \}. \end{aligned}$$

Si è dunque provato

Lemma 1. *Se* $\eta \in C[-\infty,+\infty]$, *allora* $Lu = u''+\eta u'$, *con*

$$D(L) = \{u \in C[-\infty,+\infty]\cap C^2(-\infty,+\infty) ; Lu \in C[-\infty,+\infty] \} \ (= D_{\mathcal{T}})$$

genera un semigruppo analitico in $C[-\infty,+\infty]$ *e*

$D(L) =\{u \in C[-\infty,+\infty]\cap C^2(-\infty,+\infty); Lu \in C[-\infty,+\infty], (Lu)(x) \to 0$ *per* $|x|\to\infty \}(= D_{\mathcal{V}})$.

Dal Lemma 1 segue il

Teorema 1. *Siano* $\alpha,\beta \in C[0,1]$ *due funzioni a valori reali, con* $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$, $\alpha(x) > 0$ *per* $0<x<1$. *Se, inoltre,*

(1) $\qquad \alpha^{1/2} \in C^1[0,1], \ \beta\alpha^{-1/2} \in C[0,1],$

allora $(A,D_V) = (A,D_T)$ *genera un semigruppo analitico in* $C[0,1]$.

Dimostrazione. Dobbiamo risolvere il problema

(2) $\qquad \lambda u - Au = f \in C[0,1], \ \mathrm{Re}\lambda$ grande,

dove la soluzione u appartiene a D_V o a D_T. Ora, l'applicazione

$$\Phi(x) := \int_{1/2}^{x} \alpha(s)^{-1/2}\, ds,\ 0<x<1,$$

è invertibile e la sua inversa Ψ induce una isometria J_Ψ da $C[0,1]$ a $C[-\infty,+\infty]$ mediante

$$(J_\Psi u)(t) := u(\Psi(t)),\ t \in R.$$

Una tale idea di cambiamento di variabile per risolvere la (2) si trova nel basilare lavoro di Feller [F].

Posto $v(t) := u(\Psi(t))$, $g(t) := f(\Psi(t))$, la (2) diventa $\lambda v - Lv = g$, dove $Lv := v''+\eta v'$,

$$\eta(t) := \frac{2\beta(\Psi(t)) - \alpha'(\Psi(t))}{2\sqrt{\alpha(\Psi(t))}},\ t \in R,$$

e $D(L)$ è dato da $\{v \in C[-\infty,+\infty]\cap C^2(-\infty,+\infty)\ ;\ Lv \in C[-\infty,+\infty]\}$ e da

$$\{v \in C[-\infty,+\infty]\cap C^2(-\infty,+\infty)\ ;\ Lv \in C[-\infty,+\infty],\ (Lv)(t) \to 0\ \textit{per}\ |t|\to\infty\},$$

rispettivamente.

In forza dell'assunzione (1), la funzione η appartiene a $C[-\infty,+\infty]$, cosicchè i due domini per l'operatore differenziale L coincidono e $(L,D_{\mathcal{T}}) = (L,D_{\mathcal{V}})$ genera un semigruppo analitico in $C[-\infty,+\infty]$.

Poichè (A,D_V) è simile a $(L,D_{\mathcal{V}})$ e (A,D_T) è simile a $(L,D_{\mathcal{T}})$ via l'isometria J_Ψ, si deduce facilmente che $D_V = D_T$ e A genera un semigruppo analitico in $C[0,1]$. #

Esempio. Se $\alpha(x) = x^m(1-x)^m$, $\beta(x) = x^n(1-x)^n\,\gamma(x)$, $x \in [0,1]$, dove $\gamma \in C[0,1]$, allora il <u>Teorema 1</u> si applica per $m \geq 2$ e $n \geq m/2$.

Osservazione. Non sembra ovvio verificare le condizioni di Clément-Timmermans e di Timmermans sotto l'ipotesi (1). Tuttavia, tenendo conto che la degenerazione di A è localizzata nei punti 0 e 1, scrivendo W(x) nella forma

$$W(x) = \frac{\sqrt{\alpha(1/2)}}{\sqrt{\alpha(x)}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_{1/2}^{x} \frac{2\beta(t) - \alpha'(t)}{\sqrt{\alpha(t)}\,\sqrt{\alpha(t)}}\,dt\Big),$$

si può pensare di approssimare W(x), in un intorno $(\delta,1)$ di 1, per esempio, con

$$W(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}} \exp\Big(-\frac{c_0}{2}\int_{\delta}^{x} \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\Big),$$

dove $c_0 = \lim_{x\to 1} \dfrac{2\beta(x) - \alpha'(x)}{\sqrt{\alpha(x)}}$.

Se $c_0 = 0$, poichè $\alpha^{1/2} \in C^1[0,1]$, si ha $\int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}} = +\infty$.

Se $c_0 \neq 0$, allora

$$\int_\delta^1 \frac{1}{\alpha(x)W(x)} \int_\delta^x W(t)dtdx \approx$$

$$\approx \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}} \exp\left(\frac{c_0}{2}\int_\delta^x \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right)\left[-\frac{2}{c_0}\exp\left(-\frac{c_0}{2}\int_\delta^y \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right)\right]_{y=\delta}^{y=x} dx$$

$$= \frac{2}{c_0}\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}} \exp\left(\frac{c_0}{2}\int_\delta^x \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{c_0}{2}\int_\delta^x \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right)\right)dx.$$

Se $c_0 > 0$, allora

$$\int_\delta^1 \frac{1}{\alpha(x)W(x)} \int_\delta^x W(t)dtdx \approx \frac{2}{c_0}\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}}\left(\exp\left(\frac{c_0}{2}\int_\delta^x \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right) - 1\right) dx$$

$$\geq c' \int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}} = +\infty.$$

Se $c_0 < 0$, allora nuovamente

$$\int_\delta^1 \frac{1}{\alpha(x)W(x)} \int_\delta^x W(t)dtdx \approx \frac{2}{c_0}\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}}\left(\exp\left(\frac{c_0}{2}\int_\delta^x \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right) - 1\right) dx.$$

Questa volta, $\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}} \exp\left(\frac{c_0}{2}\int_\delta^x \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right) dx$ converge, ma $\int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}} = +\infty$ porta ancora che Q non appartiene a $L^1(\delta,1)$.

Veniamo a stimare $\int_\delta^1 R(x)dx$. Il Teorema di Fubini assicura che esso coincide con

$$\int_\delta^1 \frac{1}{\alpha(x)W(x)}\left(\int_x^1 W(t)dt\right)dx.$$

Poichè solo $c_0 \neq 0$ ci interessa, (si noti che

$$\int_x^1 W(y)dy \approx \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}} \exp\left(-\frac{c_0}{2}\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right) dy),$$

si ha

$$\int_x^1 W(y)dy \approx \frac{2}{c_0}\left(\exp\left(-\frac{c_0}{2}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right) - \exp\left(-\frac{c_0}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right)\right).$$

Così, se $c_0 < 0$, dalla divergenza di $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}}$ segue

$$\int_0^1 \frac{1}{\alpha(x)W(x)}\left(\int_x^1 W(t)dt\right)dx = +\infty.$$

Se, invece, $c_0 > 0$, allora $\int_x^1 W(y)dy \approx \frac{2}{c_0}\exp\left(-\frac{c_0}{2}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\right)$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{\alpha(x)W(x)}\left(\int_x^1 W(t)dt\right)dx \approx \frac{2}{c_0}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}} = +\infty.$$

Così $\int_0^1 R(x)dx = +\infty$ e anche le condizioni di Timmermans sono soddisfatte.

Osservazione 2. Se le funzioni α e β verificano

$$\sqrt{\alpha} \in C^1[0,1] \text{ e } \frac{\beta - \alpha'}{\alpha} \in C[0,1], \tag{3}$$

allora anche (1) è soddisfatta, perchè

$$\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha}\,\frac{\beta - \alpha'}{\alpha} + \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha}\,\frac{\beta - \alpha'}{\alpha} + 2\frac{d}{dx}(\sqrt{\alpha}).$$

Dunque, sotto l'ipotesi (3), $(A,D_V) = (A,D_T)$.
Si noti che formalmente $Au = (\alpha u')' - (\alpha' - \beta)u'$, cosicchè la condizione $\frac{\beta - \alpha'}{\alpha} \in C[0,1]$ è analoga a quella di Triebel [T], p. 431, per la trattazione di operatori ellittici degeneri nello spazio $L^2(0,1)$.
Si ha però qualcosa di più, in questo caso. Infatti,

Teorema 2. *Sotto l'assunzione* (3), $(A,D_V) = (A,D_T) = (A,D_N)$.

Dimostrazione. La (3) si legge

$$\frac{1}{\alpha(x)W(x)} = \frac{1}{\alpha(1/2)} \exp\left(\int_{1/2}^{x} \frac{\beta(t) - \alpha'(t)}{\alpha(t)} dt \right) \in C[0,1],$$

cosicchè (cfr. l'introduzione) $D_T = D_N$. Poichè già sappiamo che $D_T = D_V$, l'affermazione segue. #

Osservazione 3. Se $\sqrt{\alpha} \in C^1[0,1]$, prendendo $\beta = \alpha'$, si vede che il Teorema 2 estende il Teorema 3.7 di Campiti, Metafune, Pallara [CMP], mostrando anche la coincidenza di D_N e D_T.
Notiamo che sotto l'ipotesi (3) si possono facilmente verificare sia le assunzioni di Clément e Timmermans che quelle di Timmermans. Posto infatti

$$W_1(x) := \frac{\alpha(1/2)}{\alpha(x)},$$

$$Q_1(x) := \int_{1/2}^{x} \frac{ds}{\alpha(s)},$$

$$R_1(x) := \frac{x-1/2}{\alpha(x)}, \; x \in (0,1),$$

poichè $\sqrt{\alpha} \in C^1[0,1]$, α ha zeri multipli in $x = 0,1$, $W_1 \notin L^1(0,1/2)$, $W_1 \notin L^1(1/2,1)$, ma

$$\int_0^{1/2} Q_1(x)dx = -\int_0^{1/2} \left(\int_x^{1/2} \frac{ds}{\alpha(s)} \right) dx = -\int_0^{1/2} \frac{s}{\alpha(s)} ds = -\infty,$$

$$\int_{1/2}^{1} Q_1(x)dx = \int_{1/2}^{1} \frac{1-s}{\alpha(s)} ds = +\infty.$$

Inoltre

$$\int_0^{1/2} R_1(x)dx = -\infty, \quad \int_{1/2}^{1} R_1(x)dx = +\infty.$$

Ora,

$$W(x) = \exp\Big(-\int_{1/2}^{x} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\,ds\Big) = W_1(x)\phi(x),$$

dove

$$\phi(x) := \exp\Big(-\int_{1/2}^{x} \frac{\beta(s)-\alpha'(s)}{\alpha(s)}\,ds\Big)$$

è continua e $0 < c_0 \le \phi(x) \le c_1$ per ogni $x \in [0,1]$. Poichè

$$Q(x) = \frac{1}{\alpha(x)W_1(x)\phi(x)} \int_{1/2}^{x} W_1(s)\phi(s)ds,$$

si ha

$$\frac{c_0}{c_1}\int_{1/2}^{1} Q_1(x)dx \le \int_{1/2}^{1} Q(x)dx \le \frac{c_1}{c_0}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\alpha(x)W_1(x)}\Big(\int_{1/2}^{x} W_1(s)ds\Big)\,dx$$

$$= \frac{c_1}{c_0}\int_{1/2}^{1} Q_1(x)dx,$$

cosicchè $\int_{1/2}^{1} Q(x)dx = +\infty$.

Stime analoghe mostrano che $\int_{0}^{1/2} Q(x)dx = -\infty$.

Così $Q \notin L^1(0,1/2)$, $Q \notin L^1(1/2,1)$.
Dalla

$$R(x) = W(x)\int_{1/2}^{x} \frac{ds}{\alpha(s)W(s)} = W_1(x)\phi(x)\int_{1/2}^{x} \frac{ds}{\alpha(s)W_1(s)\phi(s)}$$

segue che

$$\frac{c_0}{c_1}\int_{1/2}^{1} R_1(x)dx \le \int_{1/2}^{1} R(x)dx \le \frac{c_1}{c_0}\int_{1/2}^{1} R_1(x)dx.$$

Dunque $R \notin L^1(0,1/2)$, $R \notin L^1(1/2,1)$.

Osservazione 4. Un Teorema di generazione analitica in $C(\bar{\Omega})$, dove Ω è un aperto limitato di R^n, $n \geq 1$, con frontiera $\partial\Omega$ regolare, è stato ottenuto da Vespri [Ve], Theorem 4.8, relativamente all'operatore

$$Eu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \psi(x)^{2s} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \psi(x)^s b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x),$$

dove a_{ij}, b_i, $c : \bar{\Omega} \to R$ sono funzioni continue, $s \geq 1$, ψ è C^1 su $\bar{\Omega}$, $\psi(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$, $\psi(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, $|\nabla\psi(x)| \neq 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \ \forall\ \xi \in R^n$, con $\nu > 0$. Il dominio di E corrisponde alla nostra definizione di D_T, ma per $n > 1$ dipende da certi spazi di Sobolev con peso. Ciò appare inevitabile per potere applicare i risultati di Stewart ai problemi non degeneri a cui localmente egli si riconduce. Per una chiara esposizione dei Teoremi di Stewart, vedi Lunardi [L].

Bibliografia

[CMP] M. Campiti, G. Metafune, D. Pallara : Degenerate self-adjoint evolution equations on the unit interval, Semigroup Forum 57 (1998), 1-36.

[CT] Ph. Clément, C.A. Timmermans : On C_0 - semigroups generated by differential operators satisfying Ventcel's boundary conditions, Indag. Math. 89 (1986) 379-387.

[FGR] A. Favini, J. Goldstein, S. Romanelli : On some classes of differential operators generating analytic semigroups, Preprint.

[FR] A. Favini, S. Romanelli : Analytic semigroups on C([0,1]) generated by some classes of second order differential operators, Semigroup Forum 56 (1998), 362-372.

[F] W. Feller : The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, Ann. of Math. 55 (1952), 468 - 519.

[H] D. Henry : "Geometric theory of semilinear parabolic equations", Lecture Notes in Math. 840, 1981, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[L] A. Lunardi : "Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems", Birkhäuser, 1995, Basel, Boston, Berlin.

[M] P. Mandl : "Analytical treatment of one-dimensional Markov processes", Die Grundlehr. math. Wiss. Einz. 151, Springer-Verlag, 1968, Berlin, Heidelberg, New York.

[Mc] A.C. McBride : "Semigroups of linear operators : an introduction", Pitman Research Notes Math. Series 156, Longman Scientific and Technical, 1987.

[MP] G. Metafune, D. Pallara : Trace formulas for some singular differential operators, Preprint.

[N] R. Nagel (ed) : "One-parameter semigroups of positive operators", Lecture Notes in Math. 1184, Springer-Verlag, 1986, Berlin, Heidelberg, New York.

[T] C.A. Timmermans : On C_0 - semigroups in a space of bounded continuous functions in the case of entrance or natural boundary points, in "Approximation and Optimization", J.A. Gómez Fernández et al., eds., 1988, pp. 209-216.

[Tr] H. Triebel : " Interpolation theory, function spaces, differential operators", North Holland, Amsterdam, 1978.

[V] A.D. Ventcel' : On boundary conditions for multidimensional diffusion processes, (Russo), Teoriya Veroyat. i ee Primen 4 (1959), 172-185 ; trad. ing. : Theory of Probability and its Appl. 4 (1959), 164-177.

[Ve] V. Vespri : Analytic semigroups, degenerate elliptic operators and applications to nonlinear Cauchy problems, Ann. Mat. Pura Appl. 155 (1989), 353-388.